

Wprowadzenie do logiki
Uzasadnianie twierdzeń

Mariusz Urbański
Instytut Psychologii UAM
Mariusz.Urbanski@amu.edu.pl

Plan:

uzasadnianie twierdzeń: pośrednie vs bezpośrednie

dowodzenie

wprost

nie wprost

wyjaśnianie

nomologiczno-dedukcyjne

probabilistyczne

funkcjonalne (teleologiczne)

genetyczne (przyczynowe)

sprawdzanie

pozytywne

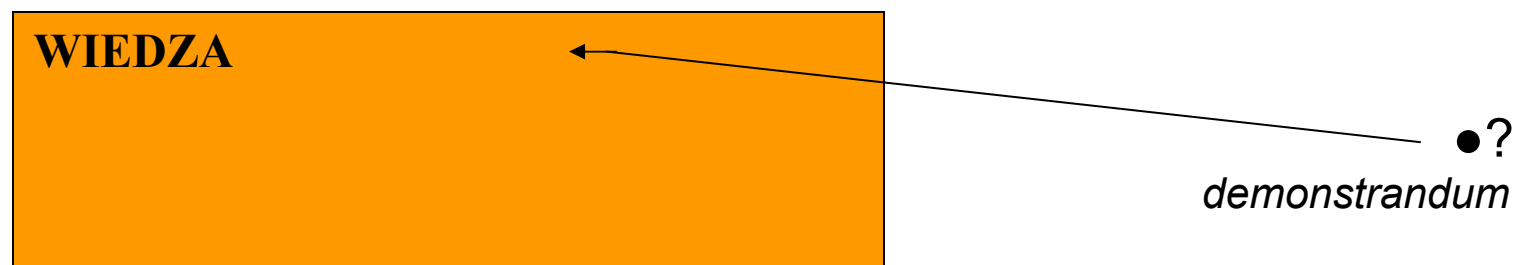
negatywne

Tradycyjnie wśród sposobów uzasadniania twierdzeń wyróżnia się:

- uzasadnianie bezpośrednie – oparte na świadectwach zmysłów (sposstrzeżenie, obserwacja, eksperyment);
- uzasadnianie pośrednie – wnioskowanie o wartościach logicznych zdań i związkach między zdaniami z uwagi na ich relacje prawdziwościowe z innymi zdaniami (dowodzenie, wyjaśnianie, sprawdzanie).

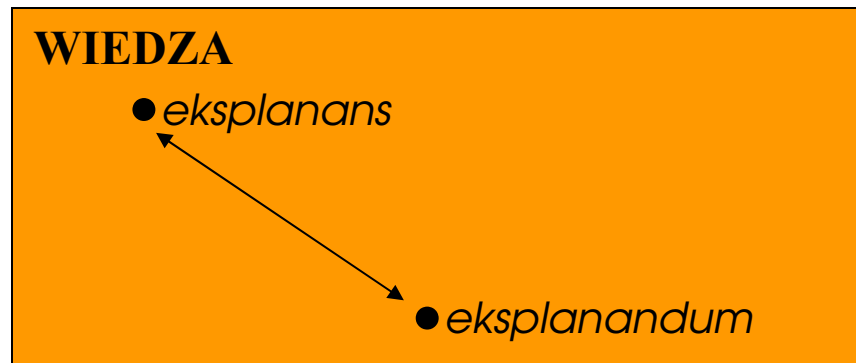
dowodzenie

poszukiwanie wśród zdań uznanych racji dla zdania dowodzonego (*demonstrandum*), o wątpliwej (bądź po prostu nieznannej) wartości logicznej;



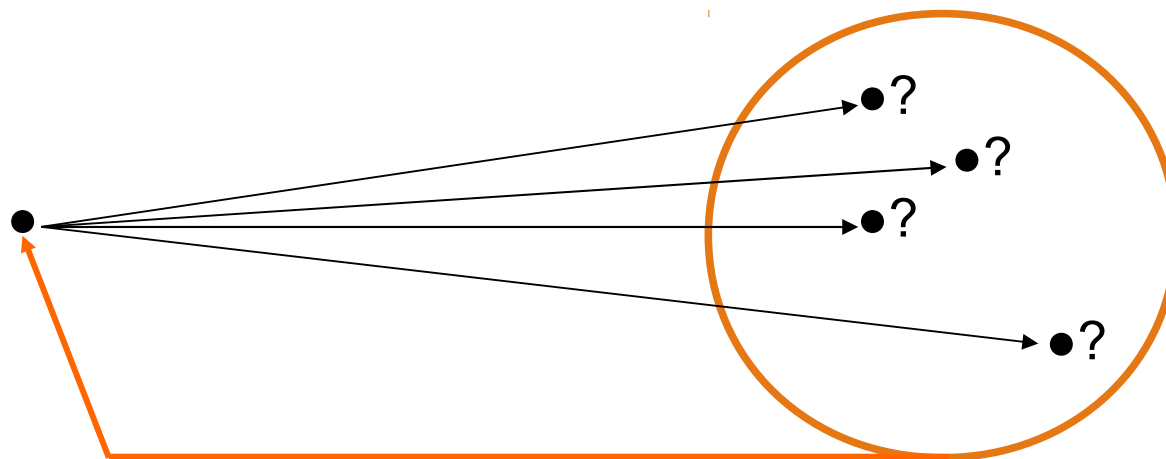
wyjaśnianie

poszukiwanie wśród zdań uznanych racji (*eksplanansa*) dla zdania uznanego (*eksplanandum*);



sprawdzanie

poszukiwanie następstw dla zdania sprawdzanego (o wątpliwej wartości logicznej) – jako racji;



dowodzenie poszukiwanie wśród zdań uznanych racji dla zdania dowodzonego (*demonstrandum*), o wątpliwej (bądź po prostu nieznannej) wartości logicznej;

Przez długie wieki za wzór metody uzasadniania twierdzeń opartej na dowodzeniu uchodziła metoda aksjomatyczna w wersji **Euklidesa*** (z jego *Elementów geometrii*).

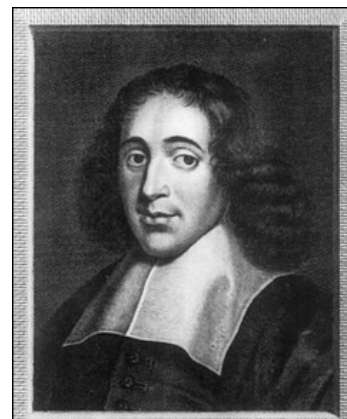
Do Euklidesa właśnie i jego „geometrycznej” metody odwoływał się **Kartezjusz**** projektując swe prawidła kierowania rozumem i na wzór Euklidesowej geometrii próbował swoją etykę budować **Benedykt Spinoza*****.

*



**





Pierwszym było nie przyjmować nigdy żadnej rzeczy za prawdziwą, zanim jej nie poznam z całą oczywistością jako takiej: to znaczy unikać starannie pośpiechu i uprzedzeń i nie obejmować swoim sądem niczego poza tym, co się przedstawi memu umysłowi tak jasno i wyraźnie, iż nie miałbym żadnego powodu podania tego w wątpliwość.

Drugim - podzielić każde z rozpatrywanych zagadnień na tyle części, na ile się da i ile będzie tego wymagać lepsze rozwiązanie.

Trzecim - prowadzić myśli po porządku, zaczynając od przedmiotów najprostszych i najłatwiejszych do poznania, aby następnie wznosić się pomału, jak gdyby po stopniach, aż do poznania bardziej złożonych; należy się przy tym domniemywać prawidłowych związków nawet między tymi, które nie tworzą naturalnego szeregu.

Ostatnim - czynić wszędzie wyszczególnienia tak dokładne i przeglądy tak ogólne, abym był pewny, iż nic nie opuściłem.

[Kartezjusz, *Rozprawa o metodzie*]

Owe długie łańcuchy racji prostych i łatwych, którymi geometrzy zwykli się posługiwać, aby dojść do najtrudniejszych dowodów, nasunęły mi przypuszczenie, iż wszystkie rzeczy podpadające pod poznanie ludzkie w taki sam sposób wzajemnie z siebie wynikają i że nie istnieją z pewnością tak odległe, do których nie mielibyśmy dotrzeć, ani tak ukryte, których nie mielibyśmy odkryć, bylebyśmy tylko powstrzymali się od przyjęcia za prawdziwą wszelkiej rzeczy, która nią nie jest, i zachowali zawsze porządek, jaki jest potrzebny, aby je wyprowadzić jedne z drugich.

[Kartezjusz, *Rozprawa o metodzie*]

aksjomat IV. Wiedza o skutku zależy od i uwzględnia wiedzę o przyczynie.

aksjomat V. Rzeczy, które nie mają ze sobą nic wspólnego, nie mogą być pojmowane jedna za pomocą drugiej; pojęcie jednej nie zakłada pojęcia drugiej.

teza III. Rzeczy, które nie mają ze sobą nic wspólnego, nie mogą pozostawać w związku przyczynowym.

Dowód: Skoro nie mają ze sobą one nic wspólnego, więc jedna nie może być pojęta za pomocą drugiej (aksjomat V.) i, zatem, jedna nie może być przyczyną drugiej (aksjomat IV.)

Q.E.D.

[Benedykt Spinoza, *Etyka sposobem geometrycznym*
wywiedziona]

Dowodzenie

dowód **wprost** zdania A w oparciu o zdania B_1, \dots, B_n polega na wykazaniu, że z B_1, \dots, B_n można wyprowadzić A za pomocą logicznie uprawomocnionych metod;

schemat rozumowania wprost opiera się na regule następującej:

$$\frac{B \rightarrow A \quad B}{A}$$

(modus ponendo ponens)

dowód **nie wprost** zdania A w oparciu o zdania B_1, \dots, B_n polega na wykazaniu, że z $B_1, \dots, B_n, \neg A$ za pomocą logicznie uprawomocnionych metod można wyprowadzić negację któregoś spośród zdań B_1, \dots, B_n ;

schemat rozumowania nie wprost opiera się na regule następującej:

$$\frac{B \rightarrow A \quad \neg A}{\neg B}$$

(modus tollendo tollens)

Jeżeli liczba naturalna n jest podzielna* przez 4, to n jest podzielna przez 2.

dowód wprost:

Założmy, że **n jest podzielna przez 4**; z definicji podzielności: istnieje taka liczba naturalna k , że $n = k \cdot 4$. Ponieważ $4 = 2 \cdot 2$, więc $n = k \cdot 2 \cdot 2$. Założmy, że $k' = k \cdot 2$; wówczas $n = k' \cdot 2$. Z definicji podzielności, **n jest podzielna przez 2.**

dowód nie wprost:

Założmy, że **n nie jest podzielna przez 2**. Oznacza to, że nie istnieje liczba k , taka że $n = k \cdot 2$. Tym samym nie istnieje liczba k' , taka że $n = k' \cdot 2 \cdot 2$, czyli taka że $n = k' \cdot 4$. Zatem, z definicji podzielności, **n nie jest podzielna przez 4.**

*Liczba naturalna m jest podzielna przez liczbę naturalną n (symbolicznie: $m|n$) wtw istnieje liczba naturalna k taka, że $m = k \cdot n$.

Nb.: dlaczego zbudowanie tabeli zerojedynekowej, której wszystkie wiersze kończą się symbolem 1 jest tautologiczności dowodem wprost, natomiast zastosowanie metody skróconej (z odpowiednim skutkiem) – dowodem nie wprost?

A oto śliczny przykład dowodu nie wprost – Euklidesa dowód na istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych:

Liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.

- Przypuśćmy, że jest tylko skończenie wiele liczb pierwszych (tj. takich liczb n , które mają dokładnie dwa dzielniki: 1 oraz n): 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ..., k .
- Zatem k jest (rzekomo) największą liczbą pierwszą.
- Tworzymy iloczyn: $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot \dots \cdot k$ (rzekomo) wszystkich liczb pierwszych.
- Liczba $m + 1$ jest liczbą pierwszą, ponieważ nie dzieli się bez reszty przez żadną z liczb pierwszych 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ..., k . Nadto, $m + 1$ jest większa od k .
- Otrzymujemy **sprzeczność**: $m + 1$ jest liczbą pierwszą większą od (rzekomo) największej liczby pierwszej k . Zatem, musimy odrzucić przypuszczenie, iż liczb pierwszych jest skończenie wiele. W konsekwencji, liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Nie istnieje największa liczba pierwsza.

Nb. za chwilę zaczniemy posługiwać się pojęciem dowodu (na gruncie KRZ i KRP), w myśl którego **udowodnić** jakieś zdanie – to znaczy wyprowadzić je ze zdań uprzednio uznanych, w skończonej liczbie kroków, z których każdy jest (logicznie) uprawomocniony:

Dowodem formuły A w oparciu o zbiór formuł X nazywamy każdy skończony ciąg formuł $\mathbf{d} = D_1, \dots, D_n$, taki że:

- 1) ostatni wyraz ciągu \mathbf{d} jest identyczny z formułą dowodzoną ($D_n = A$);
- 2) każdy wyraz ciągu \mathbf{d} :
 - a) należy do zbioru X , lub
 - b) powstaje z wcześniejszych wyrazów ciągu \mathbf{d} , w wyniku zastosowania reguł dedukcyjnych.

Pojęcia *dowodu formalnego* (takie choćby, jak wyżej) i *dowodu jako narzędzia argumentacji*, choć mają ze sobą wiele wspólnego, nie opowiadają jednak tej samej historii.

wyjaśnianie poszukiwanie wśród zdań uznanych racji (stanowiącej *eksplanans*) dla zdania uznanego (*eksplanandum*)

Mówiąc nieco metaforycznie: o ile dowodząc poszukujemy nowych prawd w oparciu o prawdy znane (czy też raczej uznajemy nowe zdania, w oparciu o to, co już uznane), o tyle wyjaśniając próbujemy odnaleźć związki między tym, co już uznane. To, co odkrywamy wyjaśniając, to nie tyle nowe prawdy, ile związki pomiędzy tym, co już wiemy.

Rozważania dotyczące wyjaśniania znaleźć możemy już u Arystotelesa – w gruncie rzeczy jako zaczątek teorii wyjaśniania naukowego traktować można uwagi z *Analitik Wtórych*, dotyczące czterech rodzajów przyczyn:

- materialnej
- formalnej
- sprawczej
- celowej

Typy wyjaśniania:

- dedukcyjny (dedukcyjno-nomologiczny)
- probabilistyczny
- funkcjonalny (teleologiczny)
- genetyczny (przyczynowy)

[za: Ernest Nagel, *Struktura nauki. Zagadnienia logiki wyjaśnień naukowych*
Leszek Nowak, *Wyjaśnianie*, w: *Filozofia a nauka*]

Nieco inne, acz równie interesujące ujęcie problematyki wyjaśniania, por:
<http://plato.stanford.edu/entries/scientific-explanation/#2.1>

jakim prawem?

wyjaśnianie nomologiczno-dedukcyjne

Wyjaśnianie nomologiczno-dedukcyjne polega na dedukcyjnym wyprowadzeniu twierdzenia, uznanego za prawdziwe (*eksplanandum*), z *eksplanansa*, na który składają się przesłanki dwojakiemu rodzaju:

1. zdania ogólne (**prawa**),
2. zdania jednostkowe, odnoszące się do rozważanego przypadku (**warunki początkowe**).

Twierdzenia ogólne głoszą pewną regularność, warunki początkowe stwierdzają, że regularność ta realizuje się w rozważanym przypadku.

Dlaczego lód pływa po wodzie?

eksplanans:

Każde ciało o ciężarze właściwym mniejszym niż ciężar wody pływa po niej. (prawo)

Ciężar właściwy lodu jest mniejszy niż ciężar wody.
(warunek początkowy)

eksplanandum: Lód pływa po wodzie.

Nb.: takie rozumowanie jest oczywiście dedukcyjne.

jakim prawdopodobnie prawem?

wyjaśnianie probabilistyczne

Bywa, że jedyne zdania ogólne (prawa), na jakie nas stać, to prawa statystyczne (głoszące, że wystąpienie pewnych zdarzeń jest prawdopodobne w określonym stopniu). Jeśli korzystając z takich praw wyjaśniamy zachodzenie zdarzeń, a nie prawdopodobieństwo ich wystąpienia, wówczas formułujemy właśnie wyjaśnienia probabilistyczne.

Nb. rozumowania takie są, jak na indukcję enumeracyjną niezupełną przystało, jedynie uprawdopodobniające.

po co? czemu to służy?

wyjaśnianie funkcjonalne

Polega na wskazaniu funkcji, jakie wyróżniony element spełnia w zachowaniu lub realizacji pewnych cech systemu, do którego należy, albo na opisanu realizacji jakiegoś celu.

(...) contemporary philosophers of biology are largely agreed on a central idea: functional explanations are abridged versions of explanations in terms of natural selection. The identification of the function is thus seen as picking out the kind of selection pressure that causes the trait (or structure) to become originally established (or, maybe, to be maintained). The details of this idea are worked out in different ways by different authors, but the selectionist (or etiological) account of functional explanation appears to provide a philosophically satisfactory reconstruction of parts of biological practice

[Routledge Encyclopedia of Philosophy]

wyjaśnianie funkcjonalne

Wyjaśnienia **teleologiczne** (celowościowe) traktuje się czasem jako od funkcjonalnych odrębne (por. J.M. Bocheński, *Współczesne metody myślenia*); ich istota polega na tym, że podają one cel badanego fenomenu.

Nb.:

Teleological explanations attempt to explain *X* by saying that *X* exists or occurs for the sake of *Y*. Since the question ‘For what purpose... ?’ may be construed either intrinsically or extrinsically, such explanations split into two broad types: those that cite goals of an agent, and those that cite functions.

[Routledge Encyclopedia of Philosophy]

skąd się to wzięło?

wyjaśnianie genetyczne (przyczynowe)

Rekonstruują ciągi zdarzeń, w których wcześniejsze układy przekształcają się w układy późniejsze. Wymieniane zdarzenia dobierane są na podstawie założeń, wyróżniających pewne zdarzenia jako przyczynowo istotne dla rozwoju układu.

Punktem centralnym problematyki wyjaśniania działań ludzkich są (...) dwa następujące pytania:

- 1. jakie są zewnętrzne bodźce wpływające na działanie ludzkie;**
- 2. jaki jest mechanizm wewnętrzny „zawarty” między owymi bodźcami a działaniem.**

[Jerzy Topolski, *Rozumienie historii*]

Problematyka wyjaśniania na gruncie nauk historycznych nie sprowadza się jednak do wyjaśnień genetycznych:

Dyrektywa wyjaśniania integralnego [postulowana przez Topolskiego], mająca zdać sprawę z integralności samej historii, zaleca rozszerzanie procedur wyjaśniających zarówno w stronę praw, jak i w stronę struktur ludzkiego działania. Prowadzić to musi do odtwarzania całej sieci wyjaśnień, penetrującej różne aspekty subiektywnej i obiektywnej strony procesu historycznego.

[Jerzy Topolski, *Rozumienie historii*]

Nb.: nie będziemy zajmować się kilkoma ciekawymi sposobami posługiwania się pojęciem wyjaśniania, głównie w naukach humanistycznych (interpretacja humanistyczna, założenie o racjonalności, koło hermeneutyczne...).

Wyjaśnianie to poszukiwanie wśród zdań uznanych eksplanansa dla uznanego eksplanandum.

Czasami jednak zdania, które do tej pory uznaliśmy, to za mało – i nie jesteśmy w stanie skonstruować eksplanansa z „materiału zastanego”. Wówczas poszukujemy **hipotez wyjaśniających**.

- wiemy, że W
- dowiadujemy się, że Z
- ale z W nie wynika* Z

szukamy zatem takiego H
(hipotezy wyjaśniającej)
aby z W i H łącznie wynikało Z

W – dotychczasowa wiedza
 Z – nowe zjawisko (ściślej, jego opis)

*Fakt, że mowa o dedukcyjnym modelu wyjaśniania nie jest w tym przypadku szczególnie istotny.

teoria: Spalanie ciał polega na wydzielaniu **flogistonu**
Johann Joachim Becher (1635-1682), Georg Ernst Stahl (1660-1734)

hipotezy wyjaśniające:

- flogiston ma ujemną masę
- flogiston jest lżejszy od powietrza
- ...

problem:
Niektóre ciała podczas spalania zyskują na wadze, zamiast tracić

Lavoisier: spalanie nie polega na wydzielaniu flogistonu, tylko na łączeniu się spalanej substancji z tlenem.

Nb.:

A story relates how Lavoisier arranged a final experiment at his death intended to determine whether and for how long a severed head remains conscious after decapitation. Supposedly, Lavoisier decided to blink as many times as possible, and had an assistant count the blinks, which numbered between 15 and 20. The story may be apocryphal. Standard biographies have never mentioned the incident, and some biologists have expressed skepticism that it would be possible. Empirical evidence on this point varies in reliability and is difficult to evaluate.



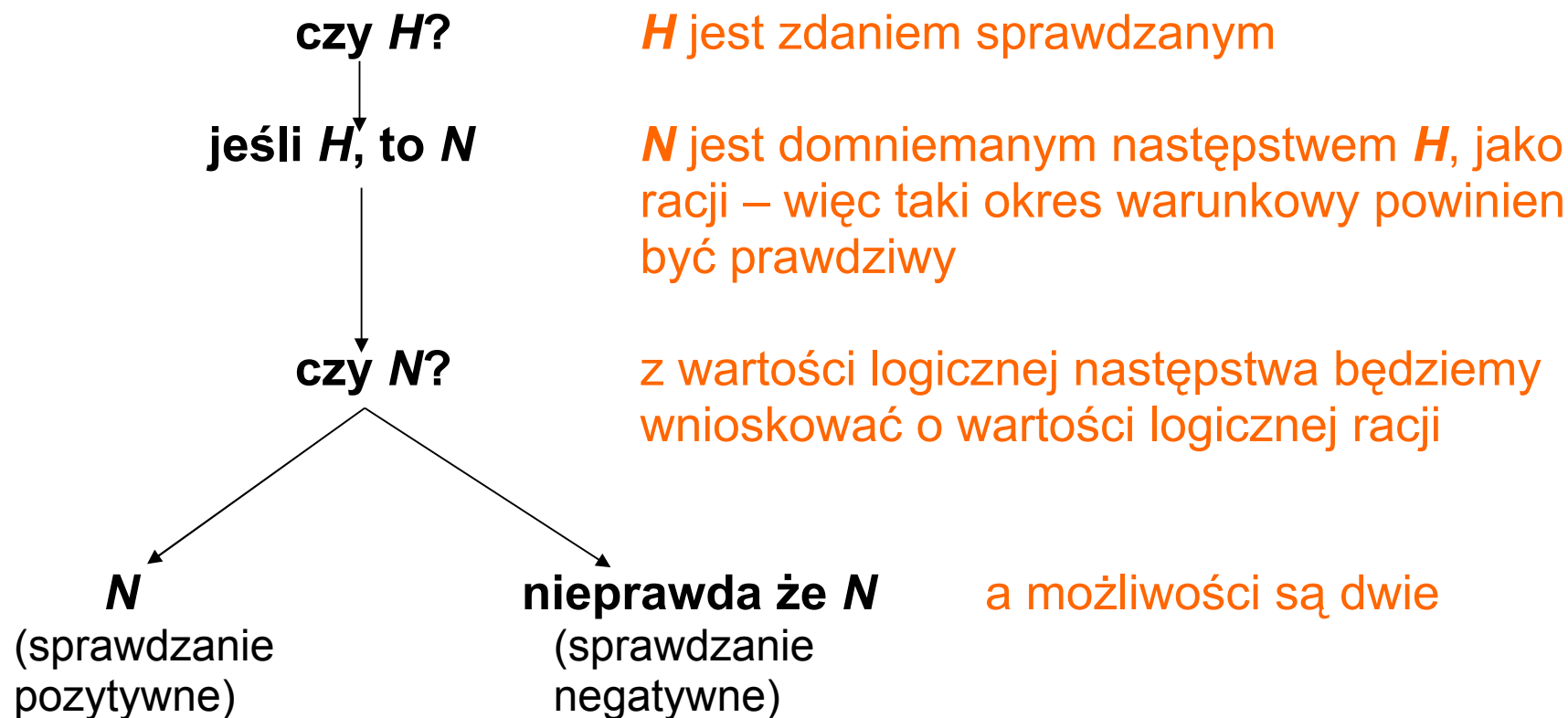
1743-1794

[http://en.wikipedia.org/wiki/Antoine_Laurent_Lavoisier#Can_a_severed_head_think.3F]

sprawdzanie

poszukiwanie następstw dla zdania sprawdzanego,
o wątpliwej wartości logicznej (jako racji)

Sprawdzanie (w szczególności sprawdzanie hipotez wyjaśniających) przebiega według następującego schematu:



Jeśli z powyższego obrazka wyeliminujemy pytania, oto co pozostanie:

sprawdzenie pozytywne

$$\begin{array}{l} H \rightarrow N \\ N \end{array}$$

H



schemat **uprawdopodobniającego**
wnioskowania z uznanego następnika

sprawdzenie negatywne

$$\begin{array}{l} H \rightarrow N \\ \neg N \end{array}$$

$\neg H$



no i wnioski

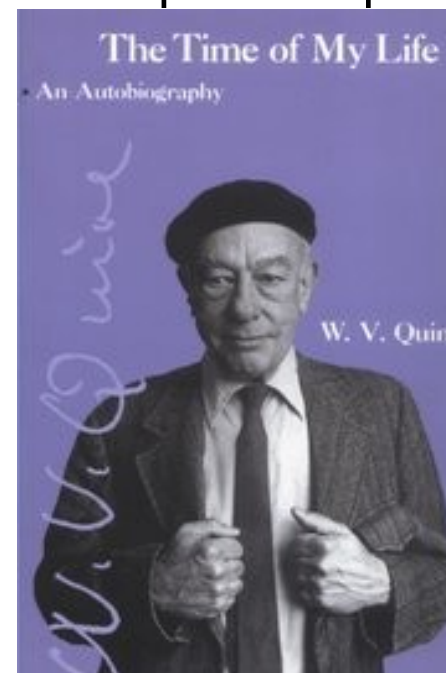
schemat wnioskowania **niezawodnego**
- *modus tollendo tollens*

Pozytywny wynik sprawdzania nie gwarantuje zatem prawdziwości hipotezy, a jedynie ją uprawdopodobnia. Wynik negatywny hipotezę falsyfikuje, a raczej falsyfikowałby, gdyby konstruowanie hipotez odbywało się w teoretycznej próżni (albo metodą „na Münchausena”).

Tworzymy hipotezy i projektujemy ich następstwa zawsze w oparciu o pewną wiedzę towarzyszącą. To co podlega falsyfikacji, to zatem nie sama hipoteza, ale koniunkcja hipotezy i owej wiedzy (teza Duhema – Quine’a)

**Cała nasza wiedza staje
pod prężaniem doświadczenia**

W. V. Quine



1908-2000

$$\begin{array}{l} (H \wedge W) \rightarrow N \\ \neg N \end{array}$$

$$\neg(H \wedge W)$$

$$\neg H \vee \neg W$$

i, na mocy jednego
z praw de Morgana:

A zatem w obronie szczególnie interesujących hipotez możemy próbować modyfikować pewne elementy wiedzy towarzyszącej.

Tam sięgaj, gdzie wzrok nie sięga

VS

kubelkowa teoria wiedzy

Czyli pouczająca opowieść o skutkach czytania schematu indukcji enumeracyjnej niezupełnej z dwóch różnych stron, z indukcjonizmem i falsyfikacjonizmem w rolach głównych.

I jeszcze zadanie:

Jakiego rodzaju uzasadnienie tytułowej tezy zawiera poniższy fragment?

Dobroczyńca bardziej miłuje obdarzonego niż ten ostatni dobroczyńcę

Nasuwa się pytanie, dlaczego ci, którzy wyświadczają dobrodziejstwa, bardziej kochają tych, którzy je otrzymują, aniżeli ci, którzy je otrzymali, tamtych, którzy im je wyświadczyli. I jak się zdaje, to słuszny byłby stosunek przeciwny. Ale można przyjąć, że to dzieje się z powodu użyteczności i osobistej korzyści, ponieważ zawdzięcza się coś jednej stronie, a druga powinna się odwzajemnić. Ale nie tylko o to chodzi, lecz u podstaw leży coś naturalnego. Działanie bowiem bardziej zasługuje na wybór, a pomiędzy wyborem i działaniem zachodzi taki sam stosunek: ten, kto doznał dobrodziejstwa, to jakby dzieło tego, który dobrodziejstwo wyświadczył. Dlatego i u zwierząt spotykamy się z

troską o potomstwo: zrodzić i po urodzeniu je chronić. I w rzeczy samej ojcowie bardziej kochają dzieci (a od ojców jeszcze bardziej matki), aniżeli sami doznają od nich miłości, a one znów bardziej kochają swoje dzieci aniżeli rodziców, ponieważ działanie jest największym dobrem. A matki bardziej kochają niż ojcowie, gdyż uważają, że dzieci bardziej są ich dziełem. Oceniają bowiem dzieła na podstawie wysiłku, a matka więcej cierpi przy urodzeniu.

[Arystoteles, *Etyka Eudemejska* 1241 a-b]

Uzasadnianie twierdzeń

Pozostanie:

Spis treści, od góry do dołu